

Vortrag von Dr. Alfred Eisler, gehalten im Rahmen der Lehrerfortbildungstagung 1995 zum Thema

Veranschaulichung von Zinsberechnungen mit Hilfe des Computers

Im Lehrplan der 3. Klasse findet man den Punkt Bearbeiten von Verzinsungsproblemen, wobei dort unter anderem folgende Sätze nachgelesen werden können :

... Aufstellen von Formeln für einfache Zinsen und Zinseszinsen ... Anwenden solcher Formeln auf Spar- und Kreditprobleme.

und weiter unten findet man dann :

... Um Unterrichtsprinzipien, vor allem die Prinzipien "Vorbereitung auf die Arbeits- und Berufswelt", "Wirtschaftserziehung einschließlich Sparerziehung und Konsumentenerziehung", "politische Bildung" und "Umwelterziehung" gerecht zu werden und um zu zeigen, wie man mathematische Modelle in verschiedenen Wirklichkeitsbereichen einsetzen kann, sollen Probleme etwa aus dem Bereich der Wirtschaft, der Lebenshaltung (Einkommen, Konsum, Sparen), des Budgets, der Gesundheit und Umwelt oder des Schulwesens bearbeitet werden.

Ein sehr gutes und immer wieder verwendetes Beispiel ist die Berechnung der Zinsen und Zinseszinsen für ein Kapital, das auf der Bank angelegt wird. Dabei sind Untersuchungen, die sich über mehrere Jahre oder sogar Jahrzehnte erstrecken, sehr mühsam und für das tiefere Verständnis der Sachverhalte auch nicht unbedingt notwendig. Sie sind jedoch unverzichtbar, wenn man einen Einblick in die langfristige Kapitalentwicklung geben möchte, bzw wenn der Verlauf einer Schuldtilgung berechnet werden soll.

Für diese Anwendungen ist der Computer ein unersetzliches Hilfsmittel, um die Anschauung der Schüler zu erhöhen.

Die folgenden Modelle wurden mit Hilfe des Programms Supercalc 5 erstellt, es kann jedoch auch jedes andere Tabellenkalkulationsprogramm dazu verwendet werden.

Die Modelle werden den Schülern fertig geliefert. Sie haben die Möglichkeit, durch Verändern der Parameter in den ersten Zeilen, entweder selbstständig oder nach Anleitung durch den Lehrer, mit den Beispielen zu experimentieren. Dabei hat sich gezeigt, daß ein übersichtlich gestalteter Tabellenkopf wesentlich für den Umgang mit den Modellen ist.

Auf die Tabelle selbst hat der Schüler keinen Einfluß, sie wird automatisch berechnet. Versehentliche Eingaben in der Tabelle kann man durch *Sperren* verhindern.

1. Berechnung von Zinsen und Zinseszinsen

Aufgabenstellung : Wir legen einen bestimmten Betrag (ein Kapital K_0) auf die Bank und untersuchen, wieviel Geld wir nach einem, zwei, drei,... Jahren abheben können, wenn unser Geld mit einem vorgegebenen Prozentsatz verzinst wird.

Dabei verwenden wir die folgende Formel : $K_{n+1} = K_n \cdot (1+p/100)$

Das erste Modell veranschaulicht diese Entwicklung über mehrere Jahre.

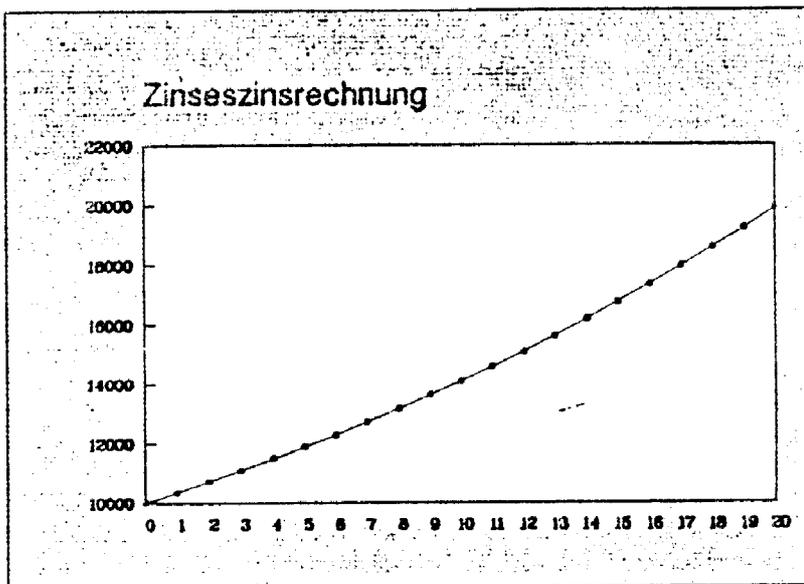
Zinseszinsrechnung

Kapital 10.000,00
 Zinsfuß 3,5
 Faktor 1,035

Jahre	Kapital
0	10.000,00
1	10.350,00
2	10.712,25
3	11.087,18
4	11.475,23
5	11.876,86
6	12.292,57
7	12.722,79
8	13.168,09
9	13.628,97
10	14.105,99
11	14.599,70
12	15.110,69
13	15.639,56
14	16.186,95
15	16.753,49
16	17.339,86
17	17.946,76
18	18.574,89
19	19.225,01
20	19.897,89

Dabei verändert man nur die Parameter in den ersten Zeilen, die entsprechenden Berechnungen erfolgen automatisch. Durch Variation des Kapitals und des Zinssatzes kann die Wirkung dieser Parameter ersichtlich gemacht werden.

Zur besseren Veranschaulichung betrachtet man nun eine passende grafische Darstellung. Dabei hat sich gezeigt, daß die *Liniengrafik* für die Schüler am anschaulichsten ist.

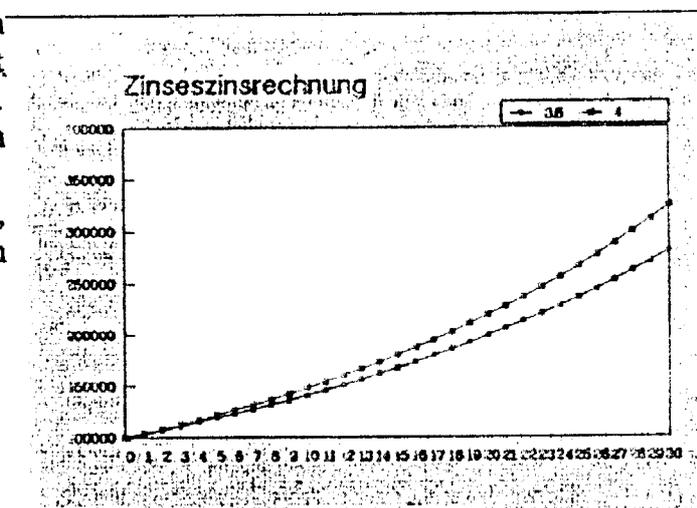


Wir erweitern unser Modell durch eine zusätzliche Spalte, sodaß zwei unterschiedliche Zinssätze nebeneinander dargestellt werden können. Man beachte die Wirkung von einem Prozent mehr (oder weniger) im Verlauf von zwei (drei) Jahrzehnten.

Bei der grafischen Darstellung stellt man nun beide Kurven gleichzeitig dar, sodaß die aufklappende Schere sichtbar wird.

Im dargestellten Beispiel wird ein Anfangskapital von 100000,- zuerst mit 3,5% und anschließend mit 4% verzinst. Der Zuwachs des Kapitals ist in den beiden Kurven dargestellt.

Mit solchen Modellen kann gezeigt werden, wie sich geringe Unterschiede bei den Zinsen langfristig auswirken können.



2. Tilgungsplan einer Schuld

Aufgabenstellung : Wir borgen uns von der Bank einen bestimmten Betrag, verzinst mit p Prozent, der mit festen Jahresraten(Annuitäten) innerhalb einer vernünftigen Zeit zurückgezahlt werden soll.

Dabei verwenden wir für alle Untersuchungen die vereinfachte Formel :

$$K_{\text{Ende}} = K_{\text{Anfang}} + \text{Zinsen} - \text{Annuität}$$

Dabei sind die folgenden Fragestellungen interessant :

1. *Wie hoch müssen die Annuitäten sein, damit der Kredit nach n Jahren abgezahlt ist?*
2. *Wie lange dauert die Rückzahlung, wenn die jährliche Rate Schillinge beträgt?*
3. *Kann man sich einen solchen Kredit überhaupt leisten?*

Das erste Modell behandelt eine einfache Kreditrückzahlung. Dabei lasse ich die Schüler vorerst selbst entscheiden, wieviel Geld wir uns ausborgen, wieviel Prozent Zinsen verlangt werden und wie hoch die Annuitäten sein sollen. Dabei erhält man oft sehr interessante Vorschläge und Ergebnisse.

Eine Tabelle könnte etwa so aussehen :

Berechnung einer Schuldtilgung		SCHULD0.CAL		
Geborgtes Kapital :	50.000,00			
Zinssatz :	8,00%			
jährliche Rückzahlung :	7.000,00			
Jahr	Anfang	Zinsen	Ende	Rückzahlung
1	50.000,00	4.000,00	54.000,00	7.000,00
2	47.000,00	3.760,00	50.760,00	14.000,00
3	43.760,00	3.500,80	47.260,80	21.000,00
4	40.260,80	3.220,86	43.481,66	28.000,00
5	36.481,66	2.918,53	39.400,20	35.000,00
6	32.400,20	2.592,02	34.992,21	42.000,00
7	27.992,21	2.239,33	30.231,59	49.000,00
8	23.231,59	1.858,53	25.090,12	56.000,00
9	18.090,12	1.447,21	19.537,33	63.000,00
10	12.537,33	1.002,99	13.540,31	70.000,00
11	6.540,31	523,23	7.063,54	77.000,00
12	63,54	5,08	68,62	84.000,00
13	-6.931,38	-554,51	-7.485,89	91.000,00

Durch Verändern der Parameter in den ersten 3 Zeilen können beliebige Tilgungspläne erstellt werden. Dabei sind dem Experimentieren keine Grenzen gesetzt. Durch Verändern der Annuität kann eine vorgegebene Laufzeit erreicht werden. Damit lassen sich Beispiele mit Fragestellung 1 lösen.

Betrachten wir nun das folgende Beispiel :

Wir leisten uns ein Auto um 200000.- und borgen uns das Geld von einer Bank, die dafür 12% Zinsen verlangt. Welche Laufzeit des Kredites ist sinnvoll? Wie hoch müssen die jährlichen Raten mindestens sein?

Berechnung einer Schuldtilgung		SCHULD1.CAL		
Geborgtes Kapital :	200.000,00			
Zinssatz :	12,00%			
jährliche Rückzahlung :	30.000,00			
Jahr	Anfang	Zinsen	Ende	Rückzahlung
1	200.000,00	24.000,00	224.000,00	30.000,00
2	194.000,00	23.280,00	217.280,00	60.000,00
3	187.280,00	22.473,60	209.753,60	90.000,00
4	179.753,60	21.570,43	201.324,03	120.000,00
5	171.324,03	20.558,88	191.882,92	150.000,00
6	161.882,92	19.425,95	181.308,87	180.000,00
7	151.308,87	18.157,06	169.465,93	210.000,00
8	139.465,93	16.735,91	156.201,84	240.000,00
9	126.201,84	15.144,22	141.346,06	270.000,00
10	111.346,06	13.361,53	124.707,59	300.000,00
11	94.707,59	11.364,91	106.072,50	330.000,00
12	76.072,50	9.128,70	85.201,20	360.000,00
13	55.201,20	6.624,14	61.825,34	390.000,00
14	31.825,34	3.819,04	35.644,39	420.000,00
15	5.644,39	677,33	6.321,71	450.000,00
16	-23.678,29	-2.841,39	-26.519,68	480.000,00

Auswertung dieses Beispiels :

1. Problem der Rückzahlung

Diese Rate ist zu gering - 16 Jahre hält unser Auto nicht! Durch Verändern der Rate auf 36.000.- erhält man eine Laufzeit von etwa 10 Jahren ein, woraus sich eine monatliche Belastung von 3.000.- ergibt.

Schätzt man nun die zusätzlichen monatlichen Ausgaben einer Familie für Wohnung, Lebensmittel, Kleidung, ... ab, so läßt sich zeigen, daß ein solcher Kredit für den Durchschnittsverdiener kaum finanzierbar ist.

2. Wieviel zahlen wir insgesamt zurück ?

Dieser Betrag läßt sich aus der letzten Spalte ablesen.

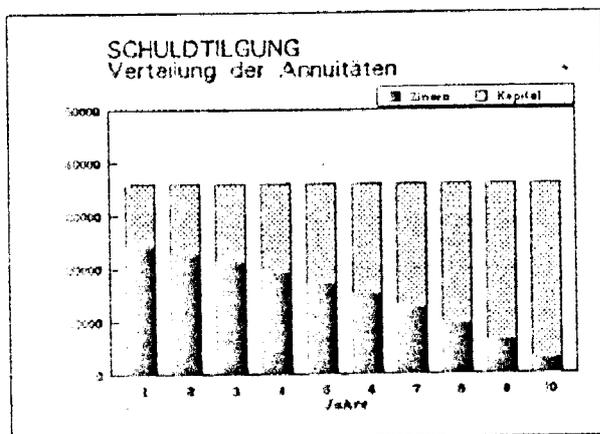
3. Wie verteilen sich unsere Annuitäten ?

Mit den Annuitäten werden vorerst einmal die jährlich anfallenden Zinsen abgezahlt. Der Restbetrag dient zur Rückzahlung des Kapitals. Daraus folgt sofort, daß am Anfang der Laufzeit der Zinsenanteil am größten ist. Dieser nimmt mit den Jahren ab, sodaß die Schuld am Anfang langsam, gegen Ende der Laufzeit jedoch stärker abnimmt.

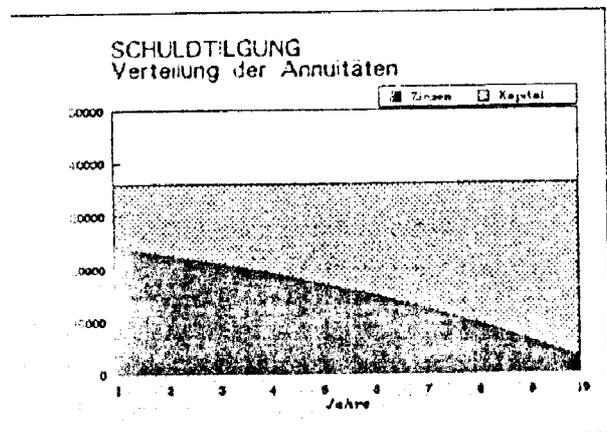
Um dies zu zeigen erweitern wir unser Modell um eine zusätzliche Spalte, in die jener Teil der Annuität eingetragen wird, der auf die Rückzahlung des Kapitals entfällt.

Berechnung einer Schuldtilgung					
Geborgtes Kapital : 200.000,00					
Zinssatz : 12,00%					
jährliche Rate : 36.000,00					
Jahr	Anfang	Zinsen	Ende	Rückzahlung	Rate->Kap
1	200.000,00	24.000,00	224.000,00	36.000,00	12.000,00
2	188.000,00	22.560,00	210.560,00	72.000,00	13.440,00
3	174.560,00	20.947,20	195.507,20	108.000,00	15.052,80
4	159.507,20	19.140,86	178.648,06	144.000,00	16.859,14
5	142.648,06	17.117,77	159.765,83	180.000,00	18.882,23
6	123.765,83	14.851,90	138.617,73	216.000,00	21.148,10
7	102.617,73	12.314,13	114.931,86	252.000,00	23.685,87
8	78.931,86	9.471,82	88.403,68	288.000,00	26.528,18
9	52.403,68	6.288,44	58.692,12	324.000,00	29.711,56
10	22.692,12	2.723,05	25.415,18	360.000,00	33.276,95
11	-10.584,82	-1.270,18	-11.855,00	396.000,00	37.270,18

Wir stellen die dritte und 6. Spalte in einer Grafik dar :



Darstellung mit Balken



Darstellung durch Flächen